###### Решение игры в смешанных стратегиях.

Более типичным среди конечных игр является случай, когда нижняя

( )

и верхняя цены ( )

игры различны (в отличие от игр с седловой точкой).

Анализируя игры с седловой точкой, мы пришли к выводу, что если игрокам предоставить выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумного противника этот выбор должен определиться принципом минимакса. При этом для А гарантирован выигрыш .

Нельзя ли гарантировать выигрыш, больший ,

если применять не

одну-единственную чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

*Стратегии, состоящие в случайном чередовании чистых стратегий,* называются в теории игр **смешанными**. При этом перед каждой игрой пускается в ход какой-то механизм случайного выбора, обеспечивающий появление каждой стратегии с некоторой вероятностью, и затем принимается та стратегия, на которую пал жребий.

Пусть имеется игра И *m* *n*, в которой

A: A1,A1, Am

* чистые стратегии игрока А;

Обозначим

*B*: *B*1 , *B*1 ,..., *B*m

* чистые стратегии игрока В.

*SA*  ( *p*1, *p*2 ,..., *pm* ),

*SB*  (*q*1,*q*2 ,...,*qn* ),

*p*1  *p*2 ...  *pm* 1,

*q*1  *q*2 ...  *qn* 1 -

- смешанные стратегии игроков А и В соответственно.

Каждая чистая стратегия

*Ai* или *Bj*

* частные случаи смешанной: все

стратегии, кроме данной, имеют вероятность «0», а данная -1.

Оказывается, если допустить не только чистые стратегии, но и смешанные, то можно для каждой конечной игры найти решение, т.е. пару устойчивых оптимальных стратегий игроков.

*Решением игры* называется пара оптимальных стратегий

*S*\* , *S*\*

в общем

случае смешанных, обладающих следующим свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей*.

*A B*

Выигрыш, соответствующий решению, называется ЦЕНОЙ ИГРЫ (её будем, как и чистую цену, обозначать через  ).

**Теорема Дж. фон Неймана-Моргенштерна** *–* основная теорема теории игр (основная теорема теории матричных игр) – состоит в следующим.

*Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно в области смешанных стратегий.*

*Доказательство основано на взаимосвязи прямой и двойственной задач линейного программирования.*

Из теоремы вытекает, что каждая конечная игра имеет цену:

    .

Действительно,  есть максимальный гарантированный выигрыш, который обеспечивает себе игрок *A*, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии содержат в качестве частного случая все чистые стратегии, то, допуская кроме чистых и смешанные стратегии, игрок *A*, во всяком случая НЕ ухудшит своих возможностей; значит,

   .

Аналогично, игрок *B* (противник) применяя смешанные стратегии не ухудшит своих возможностей, то есть    .

Отсюда следует, что

Пусть в игре

    .

*m* *n* оптимальные стратегии найдены, то есть имеется:

*S*\*  ( *p* , *p* ,..., *p* ) ,

* + 1. 1 2 *m*

*S*\*  (*q* , *q* ,..., *q* ) .

* + 1. 1 2 *n*

В общем случае, некоторые из чисел

*p*1 ,..., *pm* ; *q*1 ,..., *qn*

могут быть равны

нулю, то есть не все стратегии, доступные игроку, входят в его смешанную оптимальную стратегию.

*Активные стратегии игрока* – те стратегии, которые входят в его оптимальную смешанную с ненулевыми вероятностями.

**Теорема об активных стратегиях**: *«Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным*  *, независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий (т.е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях)»*

*Доказательство.* Пусть имеются \* \* и в них содержатся

*S*

*S*

и

*A B*

неактивные стратегии (то есть их вероятности в \* \* равны нулю).

*S*

*S*

и

*A B*

Переномеруем стратегии так, чтобы активными были первые *k* стратегий игрока *A* и первые  стратегий игрока *B* , то есть представим решение игры в виде:

*S*\*  ( *p* , *p* ,..., *p* ,0,..,0), ( *p*  *p* ...  *p*

1) ,

*A* 1 2 *k* 1 2 *k*

*S*\*  (*q* , *q* ,..., *q* ,0,..,0), (*q*  *q*

...  *q*

1) .

*B* 1 2 1 2

и

Применение

*S*

\* \* приводит к выигрышу, равному цене игры  . В

теореме утверждается, что если игрок *A* (мы) будет придерживаться

*S*

*A B*

стратегии *S*\* , то противник (игрок *B* ) может применять свои стратегии

*A*

*B*1, *B*2 ,..., *B* (но не *B* 1,..., *Bn* ) в любых пропорциях; выигрыш при этом

остаётся постоянным и равным  .

Обозначим

1 , 2 ,..., выигрыш, образующийся, если игрок *A*

применяет

*S*\* , а игрок *B* - чистые стратегии

*B*1, *B*2 ,..., *B* . На основании

свойства решения игры следует, что одностороннее отклонение противника

*A*



от его оптимальной стратегии не может быть выгодно. Поэтому

*i* это

проигрыш игрока *B* , как отклоняющегося от своей оптимальной смешанной стратегии

  ;  ;...; .

1 2

Посмотрим, может ли при соблюдении условий теоремы хотя бы одна из величин 1 , 2 ,..., оказаться действительно больше  . Оказывается, нет.

*S*

и

Действительно, выразим  (выигрыш при оптимальных

* *S*\* ) через

,..., . Так как в смешанной стратегии

*B*

,

*S*

*A*



1 2

* чистые стратегии

*B*1, *B*2 ,..., *B*

входят с вероятностями

*B*

*q*1 , *q*2 ,..., *q* , то средний выигрыш будет:

Причём



*q*  *q*  ...  *q*

1 2

 *q*  *q*  ...  *q*

 1.

1 1 2 2

  *jqj j* 1

(4.1)

Очевидно, если хотя бы одна из

1 , 2 ,..., была больше чем  , то

сумма в (4.1) была бы больше  , что противоречит условию.

Теорема доказана.

###### Упрошение игр

При больших *m* и *n* отыскание решения игры представляет трудную задачу. Поэтому стараются «редуцировать» её, то есть сократить число стратегий путём вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают двух родов: дублирующие и заведомо невыгодные.

1). Пусть дана игра И следующей платежной матрицей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| BjAi | B1 | B2 | B3 | B4 | (5.1) |
| A1 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| A2 | 0 | 2 | 3 | 2 |
| A3 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| A4 | 4 | 3 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  |

Из матрицы видно:

*A*  *A* , поэтому любую из них можно убрать. Далее,

*дубль*

3 1

сравнив почленно строки

*A*1 и

*A*2 , видим, что все элементы строки *A*2

меньше (или равны) соответствующих элементов строки

*A*1 . Значит,

стратегия

*A*2 для игрока *A*, желающего выиграть больше, заведомо

невыгодна. С учетом этого получаем:

(5.2)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| BjAi | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| A4 | 4 | 3 | 1 | 0 |

Для противника стратегия *B*3 заведомо невыгодна, поэтому столбец *B*3

в матрице можно убрать. В итоге вместо И 44 получили И 23 со следующей платежной матрицей:

1). Пусть дана И 34

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| BjAi | B1 | B2 | B4 |
| A1 | 1 | 2 | 3 |
| A4 | 4 | 3 | 0 |

(5.3)

(5.4)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| BjAi | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 0 | 5 | 5 | 2 |
| A2 | 5 | 0 | 2 | 5 |
| A3 | 5 | 5 | 1 | 1 |

Иногда удается упростить игру искусственным введением вместо чистых стратегий – смешанных. Например, в (5.4) видим, что в силу

симметрии элементов столбцов

*B*1 и

*B*2 ; *B*3

и *B*4 , а также строк

*A*1 и

*A*2 эти

стратегии, если и входят в решение, то с одинаковыми вероятностями:

*p*1  *p*2 ; *q*1  *q*2 ; *q*3  *q*4.

Отсюда идея: заранее объединить стратегии

*B*1 и *B*2 в

одну смешанную

*B*12 , состоящую наполовину из

*B*1 и на половину из

*B*2 ;

также и с

*B*3 и

*B*4  *B*34 , в которую *B*3

и *B*4

входят с одинаковыми

вероятностями 0,5. Получим (5.4)→(5.5):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| BjAi | B12 | B34 | (5.5) |
| A1 | 2,5 | 3,5 |
| A2 | 2,5 | 3,5 |
| A3 | 5 | 1 |

Убрав в матрице (5.5) дублирующую стратегию А2, получим окончательно следующую платежную матрицу И 22.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| BjAi | B12 | B34 |
| A1 | 2,5 | 3,5 |
| A3 | 5 | 1 |

*Итак, приступая к решению любой игры m* *n , необходимо, прежде всего, выполнить следующие* ***процедуры****:*

* посмотреть, нет ли в матрице седловой точки: если есть, решение уже найдено;
* если седловой точки нет, сравнить между собой почленно столбцы и строки с целью вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий;
* посмотреть, нельзя ли уменьшить число стратегий путем замены некоторых групп чистых – смешанными.